

Télécommunications - Juin 2018

Question 1 : Quantification

Expliquer le principe de la quantification. Définir les termes suivants : pas de quantification, niveau de représentation, seuil de décision, saturation d'un quantificateur. Comment calcule-t-on le SNR en sortie d'un quantificateur uniforme ? Expliquer la démarche de conception d'un quantificateur optimal.

Livre de référence 193 - 197 +

La **quantification** est le **procédé** qui permet d'approcher un signal continu par les valeurs d'un ensemble **discret**. La quantification correspondant à **des niveaux discrets**, il en résulte une **perte d'information**, pour peu que l'on puisse mesurer des variations inférieures aux longueurs d'intervalle de quantification avec des moyens analogiques.

Nous allons considérer que la quantification est instantanée et sans mémoire, ce qui veut dire que les échantillons pris en un temps "t" sont indépendants de la valeur des échantillons précédents et à venir.

Les seuils de décision forment l'ensemble de valeurs de représentations possibles.

Exemple :

Je numérise avec un pas de 2V un signal dont l'amplitude va de 0V à 10V . Mes seuils de décisions seront 0-2-4-6-8-10 V.

Les **niveaux de représentations** sont l'ensemble d'amplitude discrète du signal quantifier.

Le **pas de discrétisation** est la **distance entre deux niveaux de représentation**, autrement dit la plus petite variations du signal que le système peut distinguer.

Le **seuil de décision** du quantificateur est **la valeur limite pour laquelle le signal au temps t est quantifier à une valeur supérieure ou inférieure**

La **saturation d'un quantificateur** survient **lorsque le signal d'entrée excède la plage d'entrée** du quantificateur. Une fois que la plage du quantificateur a été dépassée, la sortie du quantificateur restera à la valeur minimale ou maximale jusqu'à ce que l'entrée revienne dans la plage

SNR Signal Noise Ratio

Soit une variable aléatoire continue M compris entre $[-m_{max}, m_{max}]$, avec un quantificateur uniforme, le pas de quantification est

$$\Delta = \frac{2m_{max}}{L}$$

Où L est le nombre de niveau de représentation du quantificateur

L'erreur Q considéré comme $Q = M - V$ est bornée entre $-\frac{\Delta}{2} \leq Q \leq \frac{\Delta}{2}$ et si Δ est assez petite, l'erreur Q peut être considérée comme une variable uniformément distribuée. La densité de probabilité de Q est alors

$$f_Q(q) = \frac{1}{\Delta} \text{ pour } -\frac{\Delta}{2} \leq q \leq \frac{\Delta}{2} \text{ et } 0 \text{ ailleurs}$$

Ceci est vrai si le signal ne sature pas le quantificateur

Avec une moyenne de quantification nulle, la variance vaut

$$\sigma_Q^2 = E[Q]^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} q^2 f_Q(q) dq = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} q^2 dq = \frac{\Delta^2}{12}$$

Si L est le nombre de niveau de représentation, le nombre de bit par échantillon sera de 2^R (R le nombre de bits utilisés par échantillon) et donc on peut écrire

$$\Delta = \frac{2m_{max}}{2^R}$$

La variance peut donc être réécrite selon cette forme

$$\sigma_Q^2 = \left(\frac{2m_{max}}{2^R}\right)^2 * \frac{1}{12} = \frac{m_{max}^2}{3 \cdot 2^{2R}}$$

Alors si P est la puissance du signal correspondant au message, on peut exprimer le SNR du quantificateur comme

$$SNR_0 = \frac{P}{\sigma_Q^2} = \frac{3P}{m_{max}^2} \cdot 2^{2R}$$

On observe donc que le SNR_0 du signal de sortie du quantificateur croît exponentiellement avec le avec le nombre de bit par échantillon R .

Cas d'un message sinusoïdal d'amplitude A_m

$$P = \frac{A_m^2}{2}$$

$$\begin{aligned}(SNR)_o &= \frac{A_m^2/2}{A_m^2 2^{-2R}/3} = \frac{3}{2}(2^{2R}) \\ 10 \log_{10}(SNR)_o &= 1.8 + 6R\end{aligned}$$

Design d'un quantificateur

"Sélectionner les niveaux de représentation et les intervalles de partition de manière à minimiser le bruit de quantification pour un nombre de L donné."

On cherche donc un ensemble de " v_k " et de " J_k " qui minimisent la distorsion moyenne.

$$D = \sum_{k=1}^L \int_{m \in J_k} d(m, v_k) f_M(m) dm$$

où $d(m, v_k)$ est la fonction de distorsion = $(m - v_k)^2$

Un quantificateur est en réalité composé de 2 partie, un encodeur (émetteur) et un décodeur (récepteur).

Option 1 : Design de l'encodeur pour un émetteur donné

On suppose donné un "Codebook" regroupant l'ensemble des " v_k " utilisé pour le décodage voulant minimiser la distorsion moyenne,

$$D = \int_{-A}^A d(m, g(m)) f_M(m) dm \geq \sum_{k=1}^L \int_{m \in J_k} [\min_{v_k \in C} d(m, v_k)] f_M(m) dm$$

Option 2 : Design du décodeur pour un encodeur donné

Connaissant les intervalles, on peut trouver un codebook optimal minimisant la distorsion moyenne:

$$D = \sum_{k=1}^L \int_{m \in J_k} (m - v_k)^2 f_M(m) dm$$

L'optimum se trouve là où la dérivée de cette fonction vaut 0:

$$\frac{\partial D}{\partial v_k} = -2 \sum_{k=1}^L \int_{m \in J_k} (m - v_k) f_M(m) dm = 0$$

$$V_{k_{opt}} = \frac{\int_{m \in J_k} m \cdot f_M(m) dm}{\int_{m \in J_k} f_M(m) dm} \quad \text{où le dénominateur est la probabilité que l'échantillon appartienne à l'intervalle } J_k$$

- Additif car il est ajouté au bruit intrinsèque du système.
- Blanc car sa puissance est uniforme sur toute la bande fréquentielle du système. C'est une analogie avec la couleur blanche, qui correspond une émission uniforme sur toutes les fréquences du spectre visible.
- Gaussien car il a une distribution normale dans le domaine temporel avec une moyenne nulle (selon la courbe de Gauss).

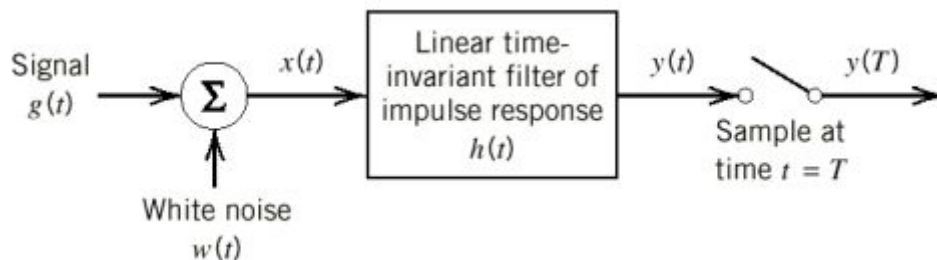
Question 2 : Filtre adapté

Expliquer l'intérêt de la notion de filtre adapté dans la conception d'un système de communications numériques. Calculer la probabilité d'erreur binaire obtenue en sortie du filtre adapté, pour un canal AWGN. Additive White Gaussian Noise, bruit additif blanc Gaussien

Slide 1.5 - 1.9 + 1.11 - 1.17 + Livre de référence 297

Objectif du filtre adapté : récupérer un signal corrompu par du bruit blanc (Densité Spectrale de puissance = $\frac{N_0}{2}$ constante) fréquent en Télécom

Soit le signal $g(t)$ additionner de bruit blanc $w(t)$ correspondant au signal résultant $x(t)$ en sortie du canal



$$x(t) = g(t) + w(t) \text{ avec } 0 \leq t \leq T$$

Le filtre $h(t)$ a alors comme but de détecter le signal en $t = T$ suivant l'équation

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = g(t) + n(t)$$

Attention, le bruit résultant du filtrage n'est plus blanc

On peut alors définir le SNR à maximiser pour que le bruit vienne perturber le moins possible le signal

$$\text{SNR} = \eta = \frac{|g_0(T)|^2}{E[n^2(t)]}$$

Avec $g_0(t)$ le signal reçu (déterministe) et le bruit $n(t)$ qui est aléatoire

Numérateur de l'expression du SNR

$$|g_0(T)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) H(f) e^{2\pi j f T} df \right|^2 \text{ avec } G(f) = F(g(t)) \text{ et } H(f) = F(h(t))$$

Dénominateur de l'expression du SNR

$$E[n^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_N df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df \text{ avec } H(f) = F(h(t))$$

Inégalité de Schwarz

L'inégalité suivante est toujours vérifiée pour deux fonctions complexes d'énergie finie

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(x) \phi_2(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_2(x)|^2 dx$$

Avec l'égalité dans les cas où k est constant (arbitraire)

$$\phi_1(x) = k \phi_2^*(x)$$

Nous retrouvons donc l'expression du SNR

$$\eta \leq \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) H(f) e^{2\pi j f T} df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df}{\frac{N_0}{2}} = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df$$

Le **SNR** est donc **indépendant de H(f) (le filtre)**. On peut ensuite trouver la réponse optimale du filtre pour que l'inégalité de Schwarz devienne égale

$$H_{opt} = k * \int_{-\infty}^{+\infty} G^*(f) e^{-2\pi j f (T-t)} df = \int_{-\infty}^{+\infty} k G(-f) e^{-2\pi j f (T-t)} df = k F^{-1} |G(f)|_{T-t} = k g(T-t)$$

Propriété : le rapport signal à bruit η en sortie du filtre adapté ne dépend que du rapport entre l'énergie E du signal d'entrée et la densité spectrale de puissance N_0 du bruit blanc en entrée

Spectre du signal en sortie

$$G_0(f) = H_{opt}(f) \cdot G(f) = k |G(f)|^2 e^{-2\pi j f T}$$

$$g_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(f) e^{-2\pi j f T} df = \int_{-\infty}^{+\infty} k |G(f)|^2 e^{-2\pi j f T} e^{2\pi j f T} df = \int_{-\infty}^{+\infty} k |G(f)|^2 df = k.E$$

Energie du signal

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)^2 df$$

Puissance moyenne du bruit en sortie

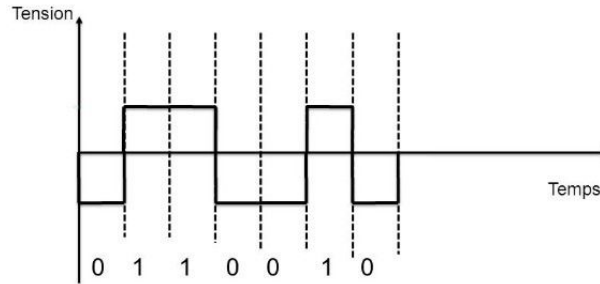
$$E[n^2(t)] = k^2 \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df = \frac{k^2 N_0 E}{2}$$

SNR final

$$\eta = \frac{(kE)^2}{(k^2 N_0 E/2)} = \frac{2E}{N_0} \text{ c'est le meilleur SNR possible}$$

Probabilité d'erreur due au bruit

Prenons un train d'impulsions binaire $x(t)$ de type "polaire NRZ" où chaque symbole 0 ou 1 est de durée T_b et où (+V et -V sont les amplitudes A respectivement).



Le signal reçu et affecté par le bruit blanc vaut alors sur un intervalle $0 \leq T_b \leq t$:

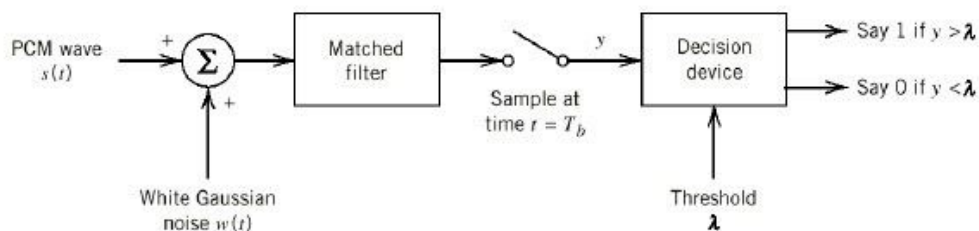
$$x(t) = A + w(t) \quad \text{symbole(1)}$$

$$x(t) = A + w(t) \quad \text{symbole(0)}$$

Supposons que le récepteur est parfaitement synchronisé, c'est-à-dire qu'il connaît parfaitement la position des symboles ainsi que leur durée T_b . Si ce n'est pas le cas, il y aurait erreur sur l'interprétation à la sortie. En effet, le canal où l'on envoie le train d'impulsion génère un certain déphasage sur le signal envoyé.

Sur une longue séquence de symboles identiques, le récepteur doit être synchronisé avec l'émetteur afin de compter le bon nombre de symboles ! Par exemple, si un émetteur envoie 10 bits à 0 consécutivement et que la cadence de l'émetteur est de 400Hz (soit $T_b = 2.5\text{ms}$), la séquence de 10 symboles durera 25ms. Si le récepteur est parfaitement synchronisé, il comptera un symbole toutes les 2.5ms et atteindra également 10 symboles échantillonnés. Si par contre le récepteur n'est pas synchronisé et considère par exemple la durée d'intervalle $T = 2\text{ms}$ il comptabilisera respectivement 12 symboles au lieu de 10, ce qui fausse le résultat !

Supposons également que la forme des impulsions est connue (impulsions rectangulaires d'amplitude A) par le récepteur. L'objectif est de savoir déterminer si le symbole est 0 ou 1 sur base du signal bruité observé par le récepteur. D'où l'apparition de notion de probabilité d'erreur due au bruit et du taux d'erreur binaire.



Le signal $s(t)$ de type PCM (Pulse Code Modulation) est l'entrée de notre système. Ce type de modulation est utilisé pour échantillonner la voix en télécommunications et pour le son. Sur base du schéma, on voit que le signal PCM ($s(t)$) est bruité par du bruit blanc Gaussien $w(t)$. Au travers d'un filtre adapté, on échantillonne le signal réceptionné (aux temps T_b) qu'on analyse en le comparant à une valeur de seuil λ . Si la valeur est supérieure à λ , alors on considère que le symbole échantillonné vaut 1, sinon vaut 0.

Ce seuil λ n'est pas forcément juste, et on distingue deux types d'erreur lorsque le symbole de sortie est erroné :

- Erreur de type 1 : choix du symbole 1 au lieu de 0
- Erreur de type 2 : choix du symbole 0 au lieu de 1.

Pour la transmission d'un symbole 0, à la sortie du filtre adapté on obtient le signal $y(t)$ échantillonné sur base $x(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} x(t) dt = -A + \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} w(t) dt$$

Le deuxième terme de l'addition est en moyenne nulle car pour rappel l'AWGN induit une densité spectrale de puissance constante.

Le signal $y(t)$ faisant office de variable aléatoire Gaussienne de moyenne $-A$ et de variance (espérance mathématique de la puissance du signal divisée par la longueur d'intervalle au carré) :

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{T_b^2} E \left[\int_0^{T_b} \int_0^{T_b} w(t) w(u) dt du \right] = \frac{1}{T_b^2} \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} E[w(t) w(u)] dt du = \frac{1}{T_b^2} \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} R_w(t, u) dt du$$

L'espérance des sommes étant la somme des espérances et avec $E[w(t) w(u)] = R_w(t, u)$ étant la fonction de covariance à l'instant t et à l'instant u . Le bruit blanc ayant une PSD = N_0 , sa fonction de covariance vaut :

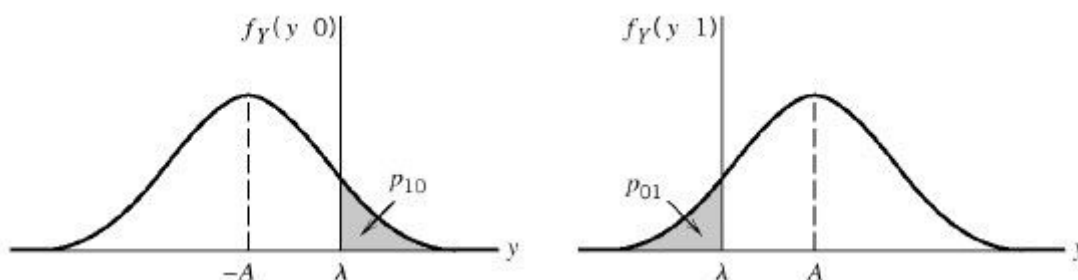
$$R_w(t, u) = \frac{N_0}{2} \delta(t - u)$$

La covariance du bruit blanc est donc une impulsion de Dirac et la variance de y devient donc :

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{T_b^2} \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} \frac{N_0}{2} \delta(t - u) dt du = \frac{1}{T_b^2} \int_0^{T_b} \frac{N_0}{2} dt du = \frac{N_0}{2T_b}$$

Voyons maintenant la fonction de distribution conditionnelle de y :

$$f_y(y | 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 / T_b}} e^{\frac{-(y+A)^2}{N_0 / T_b}}$$



En analysant les gaussienne, on distingue :

- p_{10} , la probabilité de décider 1 alors qu'on a transmis un 0
- p_{01} la probabilité de décider 0 alors qu'on a transmis un 1

On espère que ces probabilités soient la plus petite possible. Il faudrait donc que dans le cas où on envoie beaucoup plus de 0 que de 1 on ait le plus grand possible pour minimiser p_{10} et le plus petit possible pour minimiser p_{01} .

Le taux d'erreur binaire est le rapport du nombre d'erreurs binaires (nombre de symboles erronés) au nombre total de symboles transmis. Par exemple, si les 10 symboles 1001101110 sont envoyés, et qu'en sortie le récepteur détermine la trame 1011001100, on voit que 3 erreurs ont été commises et le taux d'erreur binaire vaut alors 30%.

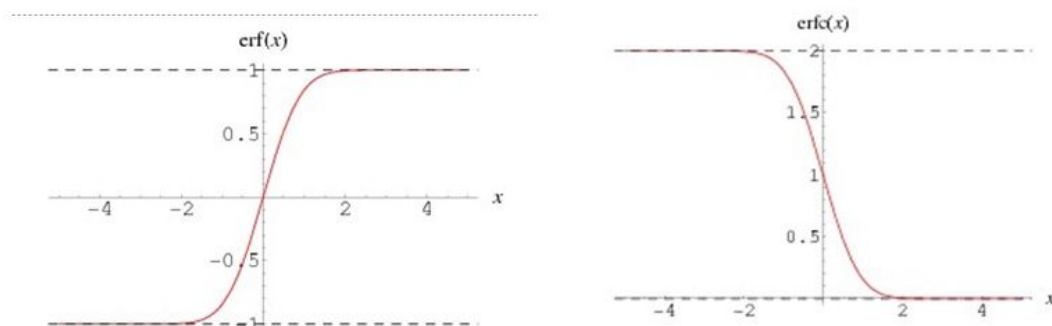
Le pire taux d'erreur binaire est 0.5 (50%). En effet, si tous les bits sont erronés, alors le taux d'erreur binaire vaut 1 (100%) mais il suffit d'inverser tous les bits et n'y a plus la moindre erreur.

En mathématique, la fonction d'erreur (aussi appelée fonction d'erreur de Gauss) est une fonction entière utilisée en analyse. Son expression est la suivante :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Cette fonction $\operatorname{erf}(x)$ est symétrique par rapport à l'origine des axes et son domaine est compris entre -1 et +1. La fonction complémentaire de cette fonction d'erreur est :

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$



Probabilité d'erreur de type 1

A savoir que $y > \lambda$ alors qu'un 0 a été transmis. Avec l'expression de la gaussienne $f_y(y|0)$ on calcule :

$$p_{10} = \int_{\lambda}^{\infty} f_y(y|0) dy = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0/T_b}} e^{-\frac{(y+A)^2}{N_0/T_b}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0/T_b}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\frac{(y+A)^2}{N_0/T_b}} dy$$

Pour faciliter l'expression on change de variable en posant

$$z = \frac{y+A}{\sqrt{N_0/T_b}} \text{ on a donc } p_{10} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-z^2} dz = 0.5 \operatorname{erfc}\left(\frac{A+\lambda}{\sqrt{N_0/T_b}}\right)$$

Probabilité d'erreur de type 2

A savoir que $y < \lambda$ alors qu'un 1 a été transmis. On obtient de manière similaire :

$$p_{01} = 0.5 \operatorname{erfc} \left(\frac{A - \lambda}{\sqrt{N_0/T_b}} \right)$$

Ainsi, on peut calculer la probabilité d'erreur moyenne P_e :

$$P_e = p_0 p_{10} + p_1 p_{01}$$

Il s'agit de la probabilité d'être en présence d'un bit 0 et de choisir 1 additionnée à la probabilité d'être en présence d'un bit 1 et de choisir 0.

$$P_e = 0.5 p_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{A + \lambda}{\sqrt{N_0/T_b}} \right) + 0.5 p_1 \operatorname{erfc} \left(\frac{A - \lambda}{\sqrt{N_0/T_b}} \right)$$

Le seuil optimal λ_{OPT} peut se calculer comme suit :

$$\lambda_{OPT} = \frac{N_0}{4AT_b} \log(p_0/p_1)$$

En effet, on remarque que le cas particulier où $p_0 = p_1 = 0.5$, c'est-à-dire dans le cas d'équiprobabilité où on a 50% de chance de tomber sur un 0 et 50% de chance de tomber sur un 1, le seuil optimal vaut $\lambda_{OPT} = 0$ car $\log(1) = 0$

Dans le cas où $p_{01} = p_{10}$ on est face à un canal "binaire symétrique". La probabilité moyenne en considérant ce cas là et le cas précédent ($p_0 = p_1$ et donc $\lambda = 0$) vaut :

$$P_e = 0.5 * 0.5 \operatorname{erfc} \left(\frac{A+0}{\sqrt{N_0/T_b}} \right) + 0.5 * 0.5 \operatorname{erfc} \left(\frac{A-0}{\sqrt{N_0/T_b}} \right) = 0.5 \operatorname{erfc} \left(\frac{A}{\sqrt{N_0/T_b}} \right)$$

Soit E_b l'énergie du signal transmis par bit :

$$E_b = A^2 T_b$$

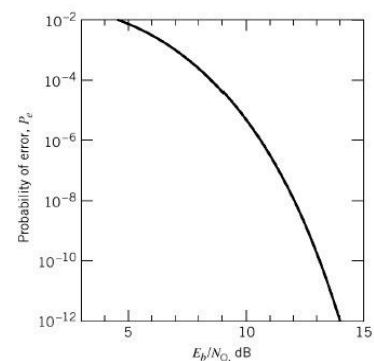
On obtient alors la forme finale de P_e :

$$P_e = 0.5 \operatorname{erfc}(\sqrt{E_b/N_0})$$

La probabilité d'erreur symbole dans le cas d'un canal binaire symétrique dépend donc uniquement du rapport E_b/N_0 entre l'énergie du signal transmis par bit (E_b) et la densité spectrale de puissance du bruit (N_0)

Comme le montre le graphique semi-logarithmique ci-dessus, plus le rapport E_b/N_0 augmente, plus la probabilité de faire une erreur diminue ! On note ainsi une amélioration exponentielle du taux d'erreur en fonction de E_b/N_0 . Alors, pour obtenir un taux d'erreur satisfaisant (inférieur à 10^{-3}), une augmentation modeste du rapport E_b/N_0 suffit, pas la peine d'aller chercher un rapport de 20dB par exemple.

Avec P_e borné tel que $P_e < \frac{\exp(E_b/N_0)}{2\sqrt{\pi} E_b/N_0}$



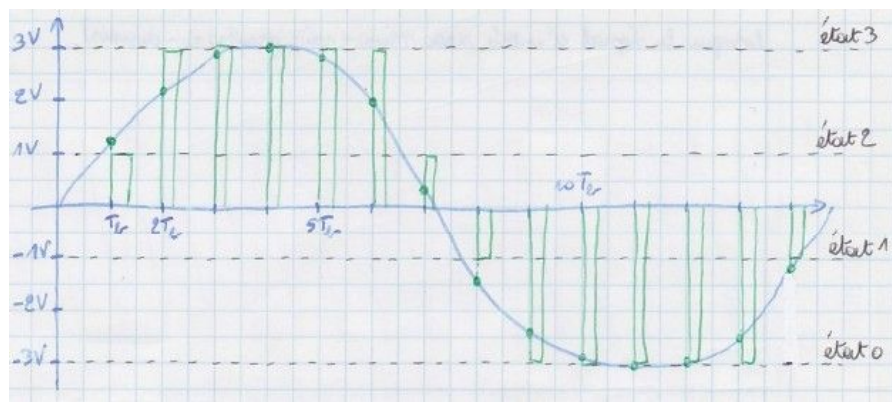
Question 3 : Critère de Nyquist

Expliquer la notion d'interférence entre symboles (ISI) et son impact sur les performances des systèmes de communications numériques. Dériver le critère de Nyquist et donner un exemple de mise en oeuvre. Comment faire pour lutter à la fois contre le bruit (filtre adapté) et contre l'interférence entre symboles (filtre de Nyquist) sur un canal AWGN?

Slide 1.19 - 1.30 + Livre de référence 261

Le principe de la modulation d'impulsions en amplitude réside dans l'encodage du signal analogique par rapport à son amplitude. Le signal est échantillonné à intervalles réguliers et le signal PAM prendra les valeurs de l'échantillonnage. Pulse Amplitude Modulation

Exemple avec une PAM-4 : un signal sinusoïdal de 3 volts d'amplitude et 4 états (+3V, +1V, -1V et -3V) donc utilisation de mots de 2 bits pour chaque symbole.



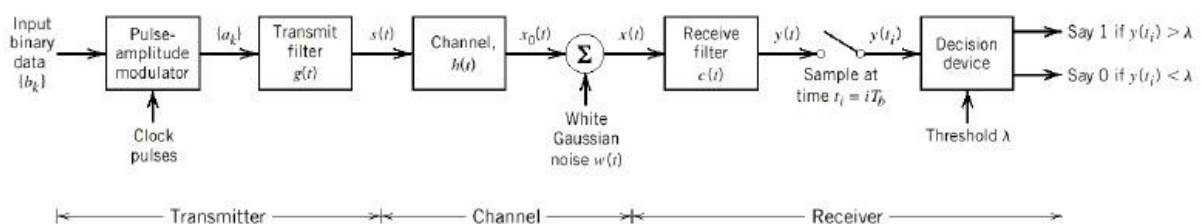
Interférence entre symboles

Soit un système de transmission par modulation PAM de type binaire, c'est-à-dire PAM-2 (un seul bit et 2 symboles). Les amplitudes a_k des impulsions sont de +1 pour le symbole binaire $b_k = 1$ et -1 pour le symbole binaire $b_k = 0$.

La séquence a_k passe dans un filtre de mise en forme $g(t)$ pour donner le signal $s(t)$

$$s(t) = \sum_k a_k g(t - kT_b)$$

Le signal $s(t)$ ne retombe pas à 0V à chaque période T_b contrairement aux impulsions a_k . On arrive alors au bout de l'émetteur du système de transmission dont voici le schéma complet :



Le signal est donc envoyé vers le récepteur à travers un canal dispersif dans lequel le bruit blanc perturbe le signal. Le canal est caractérisé par une réponse $h(t)$ et le bruit blanc par $w(t)$.

Voyons un peu ce qu'engendre le canal dispersif. Dans le cas précédent on avait considéré un canal idéal. La réponse $h(t)$ est maintenant modélisé par un filtre linéaire au canal. Pour le canal idéal la réponse est

$$h_{ideal}(t) = \alpha \cdot \delta(t - \tau)$$

Avec α l'atténuation et τ le délai de propagation

En fréquentiel, ce filtre a pour réponse

$$H_{ideal}(f) = \alpha \cdot e^{-j2\pi f\tau}$$

Le filtre est considéré idéal (pas de déformation du signal) si ces deux conditions sont remplies

- $|H(f)| = \alpha$ (distorsion d'amplitude si non respecté)
- $\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d(\arg(H(f)))}{df} = \tau$ (distorsion de phase si non respecté)

Au niveau du récepteur, le signal $x(t)$ reçu passe dans un filtre de réception $c(t)$. Le signal de sortie de ce filtre $y(t)$ est alors échantillonné à la même cadence que celle de l'émetteur ($t_i = iT_b$) avec i un nombre réel entier (positif). Après chaque période de durée T_b on échantillonne la valeur de $y(t)$ et on obtient le signal $y(t_i)$. Enfin, les échantillons de $y(t_i)$ sont soumis à un organe de décision qui les compare au seuil λ . Exprimons la sortie du filtre de réception $y(t)$ sur base des filtres :

$$y(t) = x(t) \otimes c(t) = x_0(t) \otimes c(t) + w(t) \otimes c(t) = \mu p(t) a_k + n(t)$$

Avec $p(t)$ résultant de la mise en cascade de 3 filtres (émission $g(t)$, canal $h(t)$ et récepteur $c(t)$) appliqué au signal d'entrée a_k et $n(t)$ un bruit Gaussien filtré (donc plus blanc)

$$y(t) = \mu \sum_k a_k p(t - kT_b - t_0) + n(t)$$

où t_0 représente un temps de propagation (délai) et peut être négligé sans perte de généralité (dû au canal). On a aussi μ qui est le facteur global de changement d'amplitude, c'est-à-dire que l'amplitude finale du signal est μ fois plus grande que l'amplitude du signal a_k de départ. C'est l'atténuation du signal dû au canal. Afin de déterminer μ , on normalise l'impulsion $p(t)$ au temps 0 : $p(0) = 1$

Une fois échantillonné, le signal peut s'écrire

$$y(t_i) = \mu a_{k=i} + \sum_{k \neq i} a_k p[(i - k)T_b] + n(t_i)$$

C'est dans le i ème intervalle qu'a été envoyé le bit qui nous intéresse $a_{k=i}$. Donc ici seul le premier terme nous intéresse, les deux autres étant des termes perturbateurs. En l'absence de bruit $n(t_i)$ et d'interférence entre symboles

$$\mu \sum_{k \neq i} a_k p[(i - k)T_b] \rightarrow y(t_i) = \mu a_i \text{ car } p(iT_b - kT_b) = 1 \text{ si } i = k$$

La conception d'un système de transmission numérique en bande de base a pour objectif de minimiser l'effet du bruit et de l'interférence entre symboles (ISI) de manière à maintenir le taux d'erreur le plus bas possible.

Dans les systèmes à SNR élevé (exemple : le réseau téléphonique), les performances sont principalement limitées par l'ISI, et la présence du bruit peut être négligée en première approximation

NB : k est le numéro de l'impulsion PAM envoyé tandis que i est le numéro de l'échantillon de $y(t_i)$. Si $k = i$ cela veut dire que l'échantillon ne correspond pas à l'impulsion envoyée, il y a donc interférence avec un autres symbole.

Critère de Nyquist

Pour rappel, le récepteur a pour tâche d'extraire la séquence $y(iT_b)$ en sortie du filtre de réception, puis de décoder cette séquence afin de récupérer les symboles binaires b_k . Le contrôle du canal équivalent $p(t)$ a pour but de satisfaire au mieux la propriété qui suit :

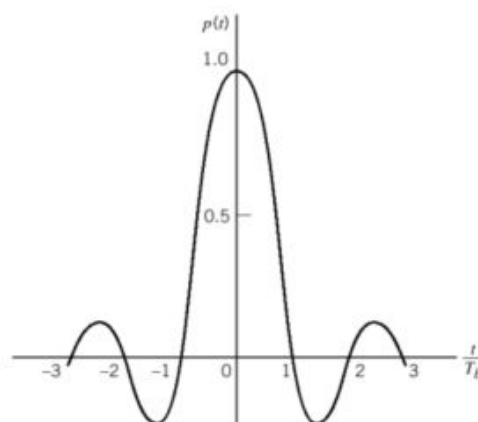
$$\begin{aligned} p(iT_b - kT_b) &= 1 \text{ si } i = k \text{ car } p(0) = 1 \\ p(iT_b - kT_b) &= 0 \text{ si } i \neq k \end{aligned}$$

Afin de n'avoir aucune interférence entre symboles (mais cela ne veut pas dire que cette propriété est respectée, il faut tenter de la satisfaire). Si cette propriété est respectée, alors la réception sera parfaite (en l'absence de bruit)

$$y(t_i) = \mu \alpha_i$$

Le critère de Nyquist est simplement l'expression de cette condition de réception parfaite (pas d'ISI) dans le domaine fréquentiel. Le spectre de l'impulsion global $p(nT_b)$ échantillonné à cadence $\frac{1}{T_b}$ peut s'écrire

$$P_{\delta}(f) = F \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} p(mT_b) \delta(t - mT_b) \right] = \frac{1}{T_b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} P(f - \frac{n}{T_b})$$



Pour une réception sans ISI, le spectre devient

$$P_{\delta}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(0) \delta(t) e^{-2\pi j f t} dt = p(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-2\pi j f t} dt = p(0) F[\delta(f)] = 1$$

Étant donné que la transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac vaut 1. Le critère de Nyquist s'écrit finalement

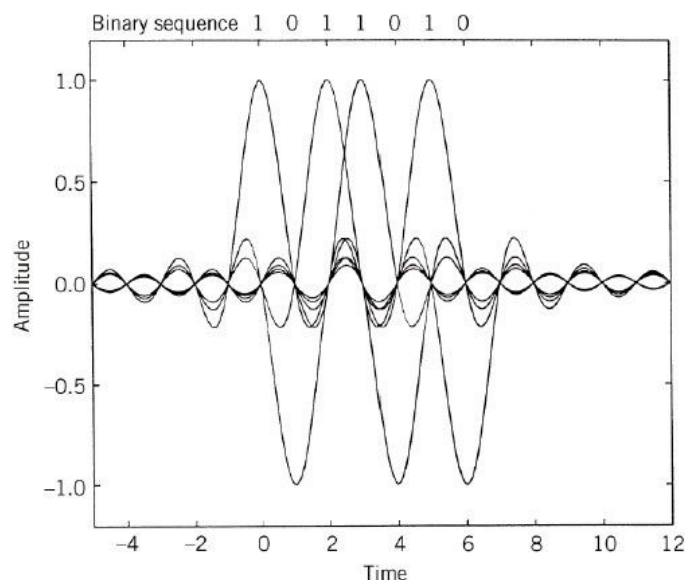
$$P_{\delta}(f) = 1 = \frac{1}{T_b} = m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P(f - \frac{n}{T_b}) \Leftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} P(f - \frac{n}{T_b}) = T_b$$

On en conclut que si le canal global $p(t)$, composé de la mise en cascade du filtre d'émission, du canal physique et du filtre de réception, a un filtre $P(f)$ satisfaisant le critère de Nyquist (ci-dessus) alors les échantillons du canal enregistrés à une cadence $\frac{1}{T_b}$ sont exemptés d'interférence entre symboles.

Le canal de Nyquist idéal a un spectre $P(f)$ rectangulaire de bande passante $W = \frac{1}{2T_b}$. L'impulsion $p(t)$ correspondante dans le domaine temporel est donné par

$$p(t) = \frac{\sin(2\pi W t)}{2\pi W t} = \text{sinc}(2W t)$$

Exemple



On remarque bien que les impulsions successives (échantillonnées aux instants $t = iT_b$, c-à-d $t = 0; t = T_b; t = 2T_b; \dots$ n'interfèrent pas les unes sur les autres car on voit que les 0 sont bien distincts par rapport aux 1 et tous les 0 se superposent à intervalle régulier T_b . A chaque période T_b , toutes les courbes passent par 0.0 (ou 1.0), il n'y a donc jamais la moindre confusion possible entre 2 symboles donc pas d'ISI !

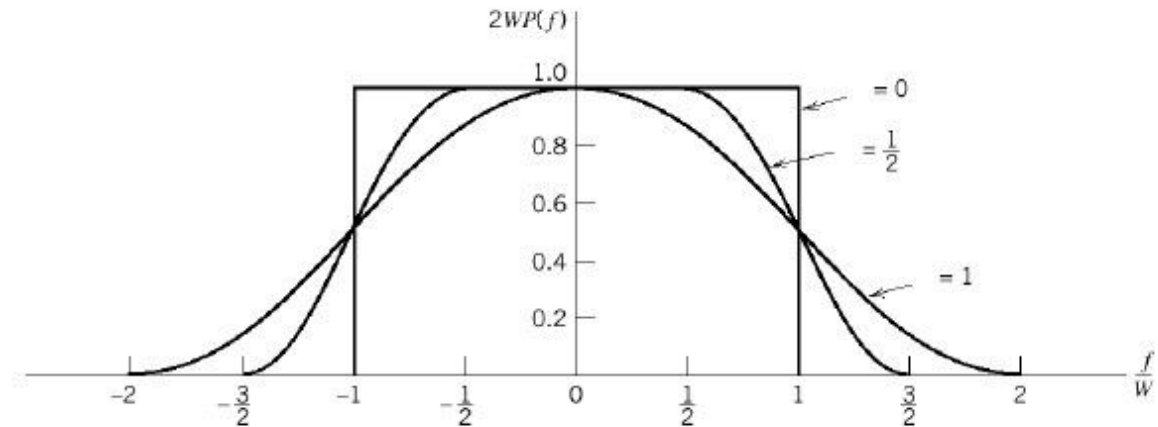
Il s'agit du canal à la bande passante la plus faible (fréquence de Nyquist W). Cependant on constate 2 inconvénients :

1. Transition abrupte de la réponse du filtre (rectangle), alors que c'est irréalisable en pratique
2. L'impulsion $p(t)$ décroît en $1/t$, ce qui est très lent, dégradant ainsi de façon importante et les performances en cas de mauvaise synchronisation.

Une solution pour palier à ces inconvénients est l'extension de la bande passante depuis la valeur minimale $W = \frac{1}{2T_b}$ vers une valeur de $B_T = [W; 2W]$. Pour un filtre dont le spectre est limité à la bande $[-2W; 2W]$, on peut se contenter de spécifier le critère de Nyquist dans la bande $[-W; W]$ comme ceci

$$P(f) + P(f - 2W) + P(f + 2W) = \frac{1}{2W} \text{ avec } -W \leq f \leq W$$

Une solution répandue à ce problème est le **filtre en cosinus surélevé (raised cosine spectrum)** constitué d'une partie plate et d'une partie de rolloff de forme sinusoidale



α le facteur de rolloff est toujours compris entre 0 et 1. Il représente la bande passante en excès par rapport à W

$$\alpha = 1 - \frac{f_1}{W}$$

La bande passante totale va alors varier entre W et $2W$ et vaudra alors

$$B_T = W (1 + \alpha)$$

Notes d'observation : Le rectangle contient la bande de canal la plus étroite possible ! C'est celui que l'on connaît : le filtre idéal, impossible à avoir en pratique. Mais comme on s'autorise à augmenter la bande passante, on observe que :

- Entre -2 à 2 on consomme 100% de plus que la bande la plus étroite
- Entre -3/2 et +3/2 on consomme 50% de plus que la bande la plus étroite

Donc visuellement, par symétrie si on périodise ces courbes on obtient en additionnant les répliques, une horizontale (respect de la condition de Nyquist)

En règle générale, on a 3 parties dans une courbe dont le facteur rolloff α est entre 0 et 1 :

- Un plateau constant
- Un morceau de cosinus de part et d'autre
- Un morceau nulle

Pour un rolloff de 0, les parties sinusoidale disparaissent tandis que pour un rolloff de 1, le plateau constant disparaît

Question 4 : Codes à réponse partielle

Exposer le principe et l'utilité des codes à réponse partielle. Décrire les systèmes duobinaire et duobinaire modifié. Généraliser aux codes à réponse partielle de classe quelconque. Comparer au filtre de Nyquist.

Slide 1.32 - 1.41 + Livre de référence 269 - 275

La technique des codes à réponse partielle ('Correlative-Level Coding' ou 'Partial-Response Signaling') permet d'atteindre la limite théorique de $2W$ symboles par seconde dans un canal de largeur W Hz, en utilisant des filtres réalisables (pas de transition abrupte du spectre) et tolérants aux erreurs de timing (affaiblissement rapide de la réponse impulsionnelle).

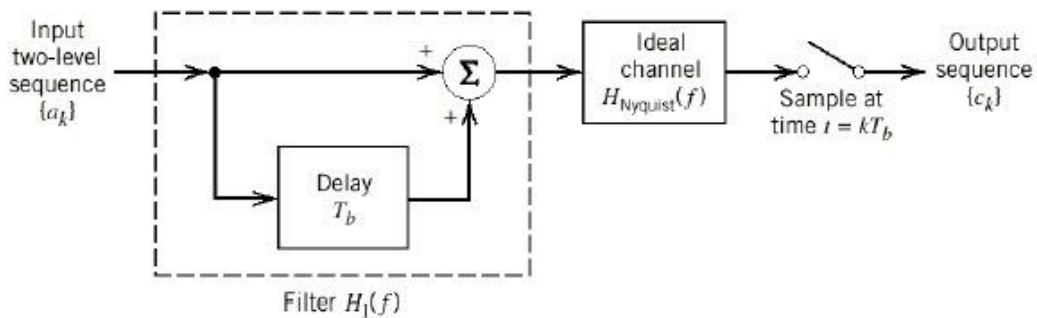
L'idée est d'introduire volontairement de l'ISI (Interférence entre symboles), de manière contrôlée, pour pouvoir l'interpréter correctement dans le récepteur.

Codage duobinaire

Le codage duobinaire est un code à réponse partielle de type 1. Il utilise des symboles binaires $b_k = 1$ ou 0. Pour rappel, la modulation PAM produit des amplitudes $a_k = +1$ ou -1 selon b_k . Le codeur duobinaire quant à lui va produire des amplitudes c_k à trois niveaux : $-2, 0$ et 2 .

$$c_k = a_k + a_{k-1}$$

La séquence d'impulsions décorréliées à 2 niveaux a_k est donc transformée en séquence d'impulsions à 3 niveaux c_k , ce qui revient à introduire de l'ISI de manière contrôlée. La séquence d'impulsions c_k passe ensuite dans un filtre de Nyquist idéal.

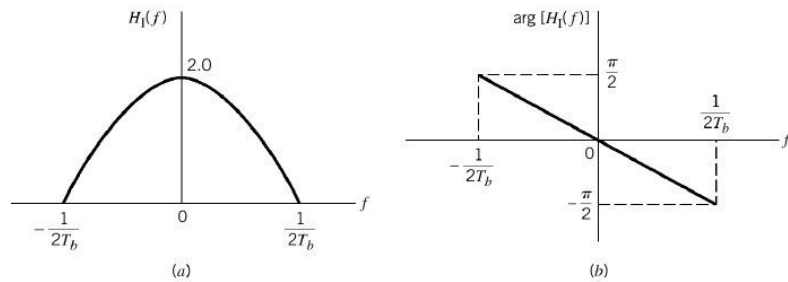


La réponse en fréquence du filtre équivalent donne

$$H_1(f) = H_{nyq}(f) [1 + e^{-2\pi j f T_b}] = H_{nyq}(f) [e^{-\pi j f T_b} + e^{-\pi j f T_b}] e^{-\pi j f T_b} = 2 H_{nyq}(f) \cos(\pi f T_b) e^{-\pi j f T_b}$$

Pour un filtre de Nyquist idéal (réponse en fréquence rectangulaire) on a donc :

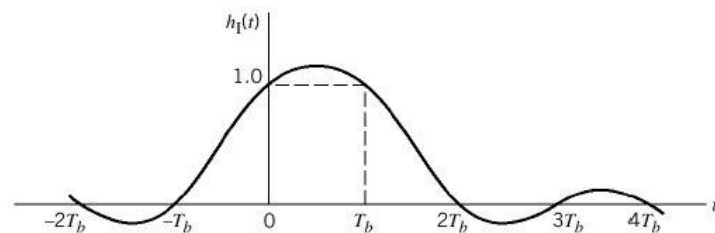
$$2 H_{nyq}(f) \cos(\pi f T_b) e^{-\pi j f T_b} \text{ avec } |f| \leq \frac{1}{2T_b}$$



La réponse impulsionnelle est constituée d'une somme de 2 impulsions de Nyquist distantes de T_b

$$h_I(t) = \frac{T_b^2 \sin\left[\frac{\pi t}{T_b}\right]}{\pi t (T_b - t)}$$

L'impulsion diminue en $\frac{1}{T^2}$ ce qui est plus rapide que l'impulsion de Nyquist



Attention, si le premier bit est erroné, toute la séquence le sera ! Sans précodage, il suffit de soustraire a_{k-1} à c_{k-1} pour obtenir a_k

$$\hat{a}_k = c_k - \hat{a}_{k-1}$$

Cela peut amener des problèmes des systèmes à rétroaction de décision et donc un risque de propagation des erreurs - Solution : Précodage (addition modulo 2 (non linéaire))

$$d_k = b_k \otimes d_{k-1}$$

TABLE 4.1 *Illustrating Example 4.3 on duobinary coding*

Binary sequence $\{b_k\}$		0	0	1	0	1	1	0
Precoded sequence $\{d_k\}$	1	1	1	0	0	1	0	0
Two-level sequence $\{a_k\}$	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1
Duobinary coder output $\{c_k\}$		+2	+2	0	-2	0	0	-2
Binary sequence obtained by applying decision rule of Eq. (4.76)		0	0	1	0	1	1	0

Prix à payer : moindre résistance au bruit car plus grand nombre de niveaux d'amplitude

Par rapport au codage PAM où on avait +1 et -1, on a maintenant 3 états (-2 ; 0 ; +2) Statistiquement, la moyenne du signal change étant donnée qu'elle est proportionnelle au carré de l'amplitude.

- Pour la PAM
On a 50% de chance de +1 et de -1, donc on calcule

$$0.5 \cdot 1^2 + 0.5 \cdot (-1)^2 = 1$$

- Pour le duobinaire
On a 25% de chance de +2, 50% de 0 et 25% de -2 donc on calcule

$$0.25 \cdot 2^2 + 0.5 \cdot 0 + 0.25 \cdot (-2)^2 = 2$$

On se rend compte que pour obtenir la même chose que la PAM dans le cas duobinaire, il faut diviser par $\sqrt{2}$ (la moyenne devient alors = 1). Dans ce cas, les signaux deviennent comparables. L'écart-type est maintenant beaucoup plus faible que (écart de $\sqrt{2}$) et les spectres se chevauchent plus, ce qui laisse à penser que le duobinaire est plus sensible au bruit que la PAM

Il faut préencoder la séquence de bits avant de coder en duobinaire. Ainsi, lorsque c_k à 3 états arrive dans l'organe de décision, il ne reste plus qu'à décider en sortie $b_k = 0$ si $c_k = +$ ou -2 et $b_k = 1$ si $c_k = 0$ (le signe n'a plus d'importance, on retombe de 3 états à 2 états)

Question 5 : Égalisation

A quoi sert l'égalisation ? Pourquoi le choix d'un égaliseur MMSE est-il intéressant ? Commenter les équations permettant de dériver l'expression de l'égaliseur MMSE. Exposer le principe de l'égalisation adaptative et de l'égalisation à rétroaction de décisions.

Slide 1.45 - 1.56 + Livre de référence 287 -

Solution pour le bruit de canal → **filtre adapté**

Solution pour l'interférence entre symbole → **critère de Nyquist**

Sauf que ces deux phénomènes se produisent simultanément, et le filtre de réception doit donc être conçu en conséquence

La solution compromis entre bruit et ISI → Minimum Mean Square Error Equalizer (MMSE)

Échantillon recueilli en sortie du filtre de réception

$$y(iT_b) = \sum_k a_k \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau) q(iT_b - kT_b - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau) w(iT_b - \tau) d\tau = \xi_i + n_i$$

Idéalement on voudrait recevoir $y(iT_b) = a_i$ et donc on définit l'erreur comme

$$e_i = y(iT_b) - a_i = \xi_i + n_i - a_i$$

L'erreur quadratique moyenne est quant à elle égale à

$$J = 0.5 E[e_i]^2 = 0.5 E[\xi_i^2] + 0.5 E[n_i^2] + 0.5 E[a_i^2] + E[\xi_i n_i] + E[n_i a_i] + E[\xi_i a_i]$$

En calculant les termes on trouve

$$(1.47) E[\xi_i^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau_1) R_q(\tau_1, \tau_2) c(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$(1.48) E[\xi_i^2] = N_0/2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau_1) \cdot c(\tau_2) \cdot \delta(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$(1.49) E[a_i^2] = 1$$

$$(1.49) E[\xi_i n_i] = E[n_i a_i] = 0$$

$$(1.49) E[\xi_i a_i] = \sum_k E[a_k a_i] = \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau) q(iT_b - kT_b - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau) q(-\tau) d\tau$$

Et donc l'erreur quadratique moyenne est égale à

$$J = 0.5 + 0.5 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (R_q(t - \tau) + 0.5 N_0 \delta(t - \tau)) c(t) c(\tau) dt d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} c(t) q(-t) dt$$

Pour trouver le filtre de réception optimal (MMSE), on différencie et on égale à 0 J par rapport à $c(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (R_q(t-\tau) + 0.5N_o \delta(t-\tau)) c(\tau) d\tau = q(-t)$$

Solution dans le domaine fréquentiel

$$(S_q(f) + N_o/2) C(f) = Q^*(f)$$

Ce qui donne une solution explicite pour le filtre de réception MMSE

$$C(f) = \frac{Q^*(f)}{S_q(f) + N_o/2}$$

La densité spectrale de puissance de la séquence $\{q(kT_b)\}$ peut se calculer comme suit

$$S_q(f) = \frac{1}{T_b} \sum_k |Q(f - \frac{k}{T_b})|^2$$

Le récepteur linéaire optimal est donc constitué de deux éléments en cascade

- Un filtre adapté de réponse $q(-t)$ avec $q(t) = g(t) \otimes h(t)$
- Un égaliseur transversal (ligne à délai à cadence $1/T_b$ dont la réponse est l'inverse de la fonction périodique $S_q(f) + N_o/2$

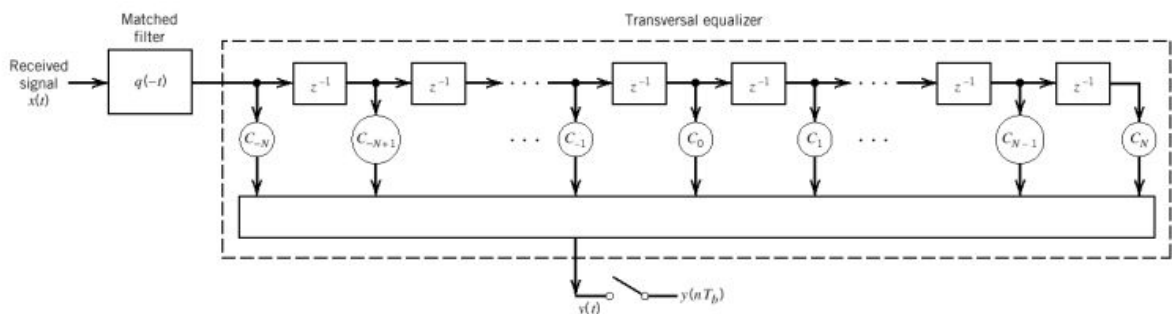
La mise en oeuvre de l'égaliseur MMSE optimal implique généralement un nombre infini de coefficients (filtre IIR). En pratique, on approxime la solution par un nombre fini de coefficients

$$\{c_k\}_{k=-N}^N \text{ (FIR)}$$

La conception d'un récepteur MMSE statique ne convient pas en pratique : le canal $q(t)$ n'est pas toujours connu (problème de l'estimation de canal), et le canal peut varier dans le temps

La solution généralement adoptée est la conception d'un récepteur adaptatif qui assure une implémentation adaptative à la fois du filtre adapté et de l'égaliseur, de manière combinée.

'Fractionally-spaced equalizer' : plus facile à mettre en oeuvre, placé directement à la sortie du canal, travaille à cadence plus élevée $2/T_b$

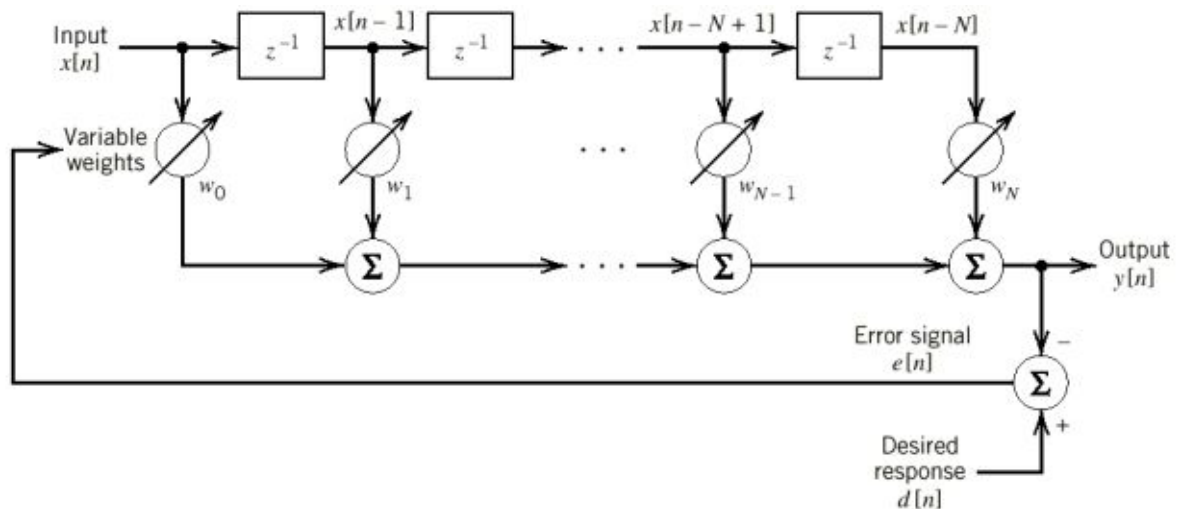


Égalisation adaptative et à rétroaction des décisions

Mise en oeuvre d'un égaliseur adaptatif: requiert le calcul d'une séquence d'erreur $e[n]$, différence entre la sortie courante $y[n]$ de l'égaliseur, et la réponse souhaitée $d[n]$

L'algorithme LMS, par exemple, peut être utilisé pour la mise à jour des coefficients $w[n]$ en fonction du signal d'erreur $e[n]$:

$$\hat{w}[n+1] = \hat{w}[n] + \mu e[n] x[n]$$

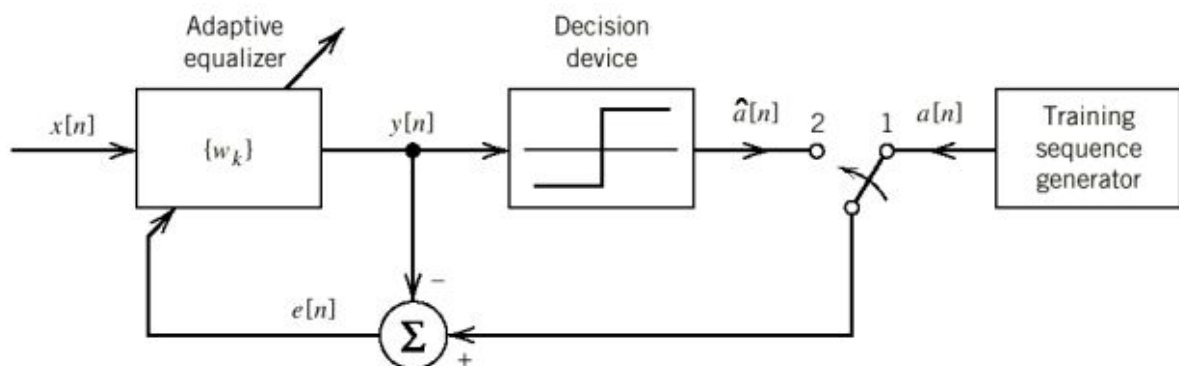


Mode d'entraînement

au démarrage, une séquence d'entraînement, connue du récepteur, est utilisée par l'émetteur, ce qui permet d'initialiser les coefficients de l'égaliseur à des valeurs correctes (disponibilité du signal souhaité $d[n]$)

Mode orienté décisions

en régime, l'émetteur transmet une séquence inconnue de symboles, et le récepteur prend une décision sur les symboles reçus. On peut supposer que ces décisions sont correctes la plupart du temps. Les décisions prises par le récepteur constituent alors la réponse souhaitée servant à calculer le signal d'erreur. Dans ce mode, le récepteur est capable de suivre les variations lentes du canal.



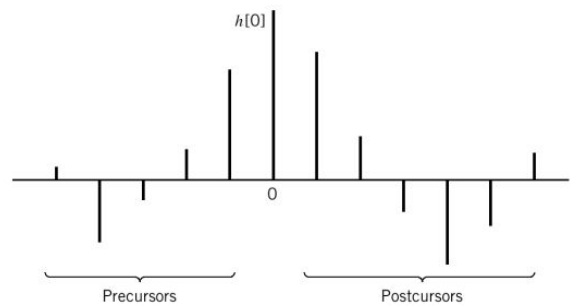
Amélioration de l'égaliseur linéaire MMSE

Égaliseur à rétroaction des décisions ('decision-feedback equalizer' ou DFE) = égaliseur non-linéaire

Séquence reçue à la sortie du canal:

$$x[n] = h[0]a[n] + \sum_{k < 0} h[k]a[n - k] + \sum_{k > 0} h[k]a[n - k]$$

L'interférence due aux échantillons précurseurs peut être annulée en utilisant les décisions déjà prises par le récepteur

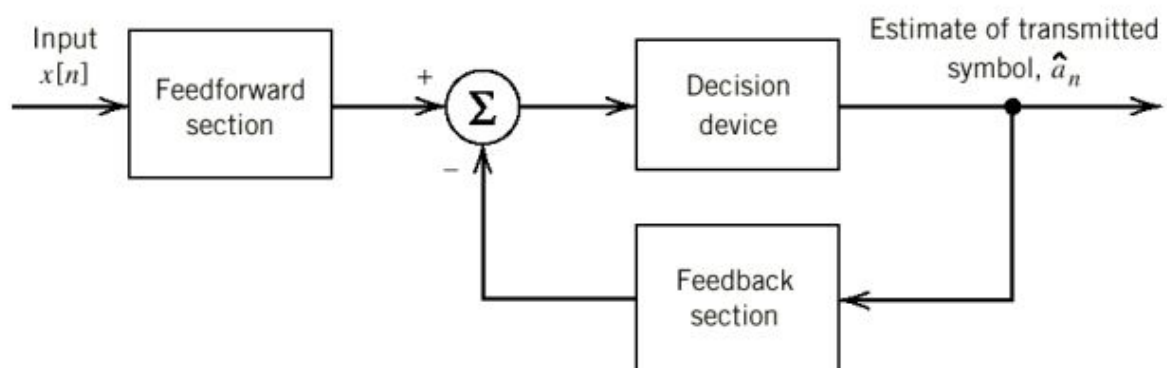


La synthèse de la partie avant ('feedforward') de l'égaliseur a pour but de réduire au minimum (sans amplifier le bruit de canal) l'interférence entre symboles due aux échantillons postcurseurs du canal

L'interférence due aux échantillons précurseurs sera ensuite parfaitement éliminée par la partie arrière ('feedback') de l'égaliseur, à condition que les décisions soient correctes mais l'inconvénient de la méthode est le risque de propagation d'erreur

Un algorithme adaptatif peut être utilisé pour mettre à jour conjointement les coefficients des 2 filtres sur base d'un même signal d'erreur

Pour les canaux fortement dispersifs, l'égaliseur DFE apporte un gain de performance significatif par rapport à l'égaliseur linéaire



Question 6 : Modulations linéaires

Décrire et comparer les principaux types de modulations numériques linéaires sans mémoire : PAM, QAM, PSK, FSK. Montrer comment ces signaux peuvent être représentés par leurs coordonnées dans un espace décrit par des fonctions de base orthonormales, qui constituent un ensemble complet.

Slide 3.1 - 3.46

Un canal est dit sans mémoire lorsque la probabilité d'erreur ne dépend pas de l'instant k d'utilisation du canal (k se référant à l'échantillonnage)

Modulation PAM

Le principe de la modulation Pulse Amplitude Modulation (PAM) réside dans l'encodage du signal analogique par rapport à son amplitude. Le signal est échantillonné à intervalles réguliers et le signal PAM prendra les valeurs de l'échantillonnage.

La modulation PAM établit une correspondance entre les symboles A_m et les formes d'ondes données par

$$s_m(t) = A_m g(t) \cos(2\pi f_c t)$$

pour $0 \leq t \leq T$ où f_c est la fréquence de la porteuse, les symboles notés A_m pour $m \in [1, \dots, M]$. On a aussi $g(t)$ une forme d'onde qui influence le spectre occupé par le signal modulé. Le niveau logique de la PAM peut varier :

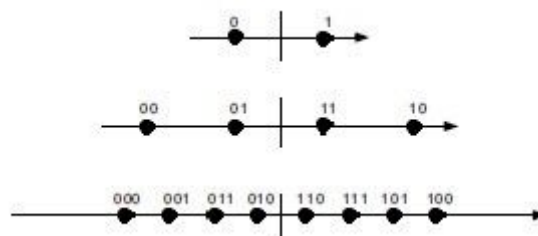
- PAM-2 : $[-1 +1]$
- PAM-4 : $[-3 -1 +1 +3]$
- (...)

Ainsi, les symboles peuvent prendre les valeurs données par :

$$A_m(t) = (2m - 1 - M) d$$

Où $2d$ est la distance entre symboles

La mise en correspondance des mots de k bits avec les symboles A_m peut se faire de différentes manières. Il est cependant un arrangement préféré en pratique, appelé encodage de Gray, qui permet de minimiser l'erreur de transmission étant donné que le passage d'un symbole à un autre dans la trame se fait avec un changement d'un seul bit comme le montre l'illustration qui suit (symboles à 2, 4 et 8 niveaux) :

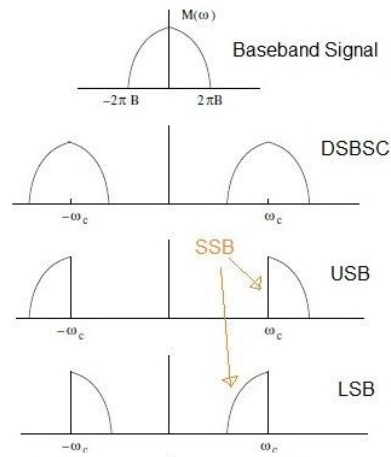


DSB : Le signal modulé défini par l'équation de la PAM avec porteuse est à double bande latérale (DSB- Double Sideband), ce qui n'est pas efficace du point de vue de l'occupation du spectre

SSB : On peut rendre ce signal à bande latérale unique en lui ajoutant sa transformée de Hilbert :

$$s_m(t) = A_m g(t) \cos(2\pi f_c t) - A_m \hat{g}(t) \sin(2\pi f_c t)$$

pour $0 \leq t \leq T$, où $\hat{g}(t)$ est la transformée de Hilbert de $g(t)$. Dans ce cas, la bande du signal SSB (Single Sideband) n'est plus que la moitié de celle occupée par le signal DSB.



La modulation PAM peut aussi être employée sans porteuse. On parle alors de PAM en bande de base et les formes d'onde sont simplement données par

$$s_m(t) = A_m g(t)$$

Dans le cas particulier de symboles binaires +d et d (PAM-2), on a

$$s_1(t) = -s_2(t)$$

Ces deux signaux sont dits opposés et ont même énergie ε donnée par

$$\varepsilon = \int_0^T s_1^2(t) dt = \int_0^T s_2^2(t) dt$$

Et un coefficient de corrélation ρ donné par

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt$$

Avec la corrélation ρ_{12} entre deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ d'énergie ε_1 et ε_2 qui s'exprime comme suit :

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt$$

Modulation QAM

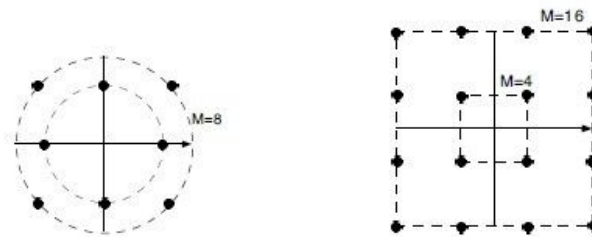
La modulation *Quadrature Amplitude Modulation* (QAM) ou modulation d'amplitude en quadrature (MAQ) est une modulation où l'on effectue de la PAM sur les deux porteuses en quadrature associées à une même fréquence c'est-à-dire à la fois sur le cosinus et le sinus de la même porteuse. Les formes d'onde sont données par

$$s_m(t) = A_{mc} g(t) \cos(2\pi f_c t) - A_{ms} g(t) \sin(2\pi f_c t) = V_m g(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_m)$$

Avec

$$V_m = \sqrt{A_{mc}^2 + A_{ms}^2} \text{ et } \theta_m = \text{ATM} \frac{A_{mc}}{A_{ms}}$$

Ces différentes équations servent à mettre en évidence que cette modulation peut aussi être vue comme une modulation combinée de phase et d'amplitude. En combinant M1 niveaux d'amplitude avec M2 valeurs de phase, on a M1M2 symboles dans la constellation. Des exemples de constellations sont donnés à la figure ci-dessous (encodage de Gray)



Modulation PSK

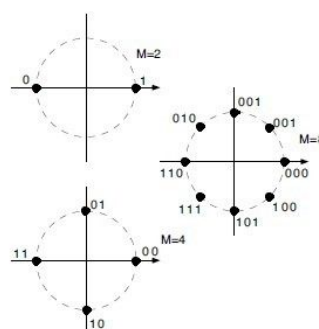
La modulation Phase Shift Keying (PSK) ou modulation de phase (MDP) est une modulation pour laquelle les formes d'ondes sont données par :

$$s_m(t) = g(t) \cos(2\pi f_c t + \frac{2\pi(m-1)}{M})$$

Où $\theta_m = \frac{2\pi(m-1)}{M}$ sont les différentes phases possible de la porteuse qui véhicule l'information. On ajoute ainsi un incrément de phase allant de 0 à π au signal en bande de base. Ces signaux ont tous de même énergie donnée par

$$\varepsilon = \int_0^T s_m^2(t) dt = 0.5 \int_0^T g^2(t) dt = \frac{\varepsilon_g}{2}$$

L'ensemble des symboles possibles, que l'on appelle constellation est représenté à la figure qui suit pour M = 2, 4, 8 ainsi que la mise en correspondance avec les mots binaires par encodage de Gray.



Modulation FSK

Une autre quantité sur laquelle l'information peut être imprimée est la fréquence. Une version très simple de la modulation de fréquence numérique, mais suffisante pour en étudier les performances dans un canal de type BBGA (Bruit Blanc Gaussien Additif) est celle où les formes d'ondes sont données par

$$s_m(t) = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{T}} \cos(2\pi f_c t + 2\pi m \Delta_f t)$$

Les formes d'onde en bande de base $s_{lm}(t)$ sont données par

$$s_{lm} = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{T}} e^{2\pi j m \Delta_f t}$$

Ce type de modulation porte le nom de FSK : Frequency Shift Keying. L'écart de fréquence entre les différentes formes d'onde est donné par Δf . Toutes les formes d'onde ont la même énergie qui est donnée par

$$\varepsilon = \int_0^T s_m^2(t) dt = \frac{2\varepsilon}{T} \int_0^T \cos^2(2\pi f_c t + 2\pi m \Delta_f t) dt$$

Elles ont des coefficients de corrélation ρ_{kr} donnés par (k et r étant des nombres entiers allant de 1 jusqu'au nombre d'états de symbole possible)

$$\rho_{kr} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon}} \int_0^T s_k(t) s_r(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(2\pi f_c t + 2\pi k \Delta_f t) \cos(2\pi f_c t + 2\pi r \Delta_f t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\pi(k-r) \Delta_f t) dt$$

$$\rho_{kr} = \frac{1}{2\pi(k-r) \Delta_f T} \sin(2\pi(k-r) \Delta_f T)$$

On obtient un sinus cardinal $\frac{\sin(x)}{x}$. Le coefficient de corrélation est bien compris entre +1 et -1 mais ici ne peut clairement pas descendre jusqu'à -1. Mais on ne veut pas aller jusque 1 car en modulation de fréquence, il faut que les deux formes d'ondes codant 2 états différents ne se ressemblent pas du tout ! En effet, noyé dans le bruit, il faut les reconnaître.

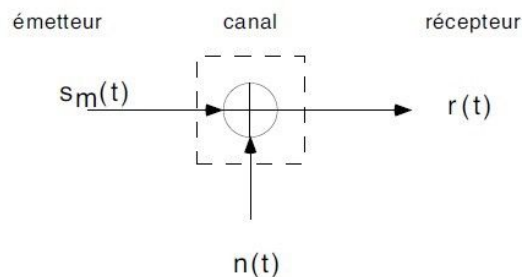
Si on fixe k et r, on a plus que $\Delta_f T$ comme degré de liberté avec T la durée du symbole. Si on prend Δ_f trop grand, on consomme trop de bande passante, tandis que si on prend Δ_f trop petit, les formes d'ondes se ressemblent trop et ne sont plus distinguables dans le bruit. Le meilleur compromis est de prendre Δ_f au premier zéro (racine) du sinus cardinal et donc d'avoir le coefficient de corrélation égale à 0.

Question 7 : Détecteur optimal

Soit un signal numérique de type PAM-M, pouvant prendre la forme $s_1(t)$, $s_2(t)$, ..., $s_M(t)$. A partir de la représentation construite par le démodulateur, c'est-à-dire les coordonnées r_k , comment le détecteur peut-il décider au mieux du signal qui se cache derrière ces coordonnées r_k ? Notant s_m le vecteur des coordonnées associées au signal $s_m(t)$, le choix se portera sur le signal $s_m(t)$ tel que l'on maximise $p[s_m|r]$. Montrer comment ce critère peut mener au principe du détecteur cohérent. Pourquoi ce récepteur porte-t-il le nom de 'cohérent' ?

Livre de référence 282 - 287

L'objet de cette partie est d'étudier les structures de réception optimales à utiliser pour un signal qui est reçu après passage dans un canal du type BBGA (Bruit Blanc Gaussien Additif). Cela signifie qu'à la sortie du canal, on retrouve le signal émis, entaché d'un bruit blanc, Gaussien et additif (non corrélé avec le signal émis). Voici le modèle qui nous intéresse



A ne pas confondre :

Un **démodulateur** est l'organe qui convertit le signal reçu $r(t)$ en une autre représentation (par exemple, les coordonnées du signal reçu dans un espace dont la dimensionnalité est fixée par la modulation avec laquelle on travaille) et donc quelque chose de plus compact

Le **détecteur** est l'organe qui décide, à partir de la représentation produite par le démodulateur, quelle est la forme d'onde qui a effectivement été transmise. Le détecteur peut parfois commettre des erreurs, et l'objet de cette partie du document est d'évaluer les performances des récepteurs (ici en PAM)

Représentation des signaux

Un signal peut être entièrement décrit si on connaît ses coordonnées dans un espace décrit par des fonctions de base orthonormales, qui constituent un ensemble complet. Les fonctions de base dont on a besoin dépendent de la modulation en question. Prenons la modulation PAM-M. On note par N la dimension de l'espace auquel il faut recourir

La modulation PAM requiert une seule fonction de base orthonormale ($N = 1$), donnée par

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t)$$

Les différentes formes d'onde possibles, $s_m(t)$, ont des coordonnées notées s_m valant

$$s_m = A_m \sqrt{\frac{\epsilon_g}{2}}$$

Dès lors

$$s_m(t) = s_m f(t)$$

Dans le cas où le signal émis n'est pas corrompu par du bruit, le démodulateur peut projeter le signal reçu (c'est-à-dire aussi celui émis puisqu'il n'y a pas de bruit) sur les fonctions de base associées à la modulation utilisées et le détecteur peut comparer les coordonnées ainsi obtenues avec celles des signaux possibles, et décider.

Le signal reçu est cependant entaché de bruit, ce qui a pour effet de modifier les coordonnées observées par rapport à la situation idéale. En projetant le signal reçu $r(t) = s_m(t) + n(t)$ sur les fonctions de base, on trouve alors des coordonnées r_k données par

$$r_k = \int_0^T r(t) f_k(t) dt = \int_0^T s_m(t) f_k(t) dt + \int_0^T n(t) f_k(t) dt = s_{mk} + n(k)$$

avec s_{mk} la m ième coordonnées sur la k ième forme d'onde de base. C'est une variable déterministe. Le terme n_k est quant à lui une variable aléatoire de moyenne nulle (bruit blanc gaussien) provoquée par le bruit. Le terme $n(t)$ étant gaussien, $n(k)$ a une distribution gaussienne. Or l'intégrale de $n(t)$, étant une transformation linéaire, donne une distribution gaussienne. Ces coordonnées r_k sont donc des variables aléatoires gaussienne de moyenne non nulle, la moyenne étant de s_{mk} puisque le bruit $n(t)$ est centré et de variance donnée par :

$$E[(r_k - s_{mk})^2] = E[n_k^2] = N_0 / 2$$

par définition du bruit blanc ayant une densité spectrale de puissance (PSD) constante. Par ailleurs, les coordonnées r_k sont aussi décorrélées puisque :

$$E[(r_k - s_{mk})(r_l - s_{ml})] = E[n_k n_l] = \delta_{kl}$$

avec comme résultat dépendant de k et l :

$$\text{si } k = l, \text{ alors } \delta_{kl} = 1 \text{ donc } E[(r_k - s_{mk})(r_l - s_{ml})] = N_0 / 2$$

$$\text{si } k \neq l, \text{ alors } \delta_{kl} = 0 \text{ donc } E[(r_k - s_{mk})(r_l - s_{ml})] = 0$$

A partir de là, on peut dès lors reconstituer le signal reçu $r(t)$ à partir de ses coordonnées comme suit,

$$r(t) = \sum_{k=1}^N r_k f_k(t) + n'(t) = \delta_{kl}$$

Attention, $f_k(t)$ permet de représenter tout ce qui peut être transmis par l'émetteur, mais pas forcément toute la gamme de bruit ! La collection des r_k n'est donc pas suffisante pour reconstruire $r(t)$. Il y a aussi le résidu de bruit $n(t)$ à retrouver. Mais $n(t)$ ne contient que du bruit et r_k contient toute l'information permettant de retrouver les bit transmis et donc $n(t)$ on s'en fiche. En effet, on peut montrer que :

$$E[r_k n'(t)] = 0$$

De ce fait, on peut considérer que les r_k constituent une représentation équivalente à la connaissance de $r(t)$, en tout cas pour ce qui est de l'information dont on a besoin pour prendre la décision. Autrement dit encore, **la connaissance des coordonnées r_k est équivalente à celle de $r(t)$ pour ce qui est du problème de détection.**

Détecteur optimal

A partir de la représentation construite par le démodulateur, c'est-à-dire les r_k , comment le détecteur peut-il décider au mieux du signal qui se cache derrière ces coordonnées r_k ? Ce qui intéresse l'utilisateur, c'est que le récepteur commette le moins d'erreurs de décision possible. On montrera plus loin que le critère d'optimisation du détecteur qui correspond à la probabilité d'erreur minimale, est le critère du maximum a posteriori. Cela signifie que l'on décide que $s_m(t)$ a été transmis si la densité de probabilité de $s_m(t)$ conditionnée à r est maximale. Notant s_m le vecteur des coordonnées associées au signal $s_m(t)$, le choix se porte sur le signal $s_m(t)$ tel que l'on maximise

$$p[s_m | r]$$

qui est la probabilité a posteriori de s_m . En utilisant la formule de Bayes, on a encore

$$p[s_m | r] = \frac{p[r | s_m] p[s_m]}{p[r]} = \frac{p[r | s_m] p[s_m]}{\sum_{m=1}^M p[r | s_m] p[s_m]}$$

$p[r | s_m]$ étant la probabilité de vraisemblance calculable donc connue

$p[s_m]$ étant la probabilité à priori. Par exemple en QAM-16 $p[s_1] = \dots = p[s_{16}] = \frac{1}{16}$ donc connue

$p[r]$ étant toujours constante pour tous les m car cette probabilité ne dépend pas de s_m

Et comme l'algorithme consiste à prendre le maximum a posteriori des $p[s_m | r]$, diviser par $p[r]$ ne change rien, donc on peut simplement maximiser a posteriori le numérateur uniquement ! De même, $p[s_m]$ est identique pour tout m , donc on peut le retirer car on ne cherche que le maximum.

Donc pour résumé, dans le cas particulier où les différents symboles sont équiprobables, on aura $p[s_m] = \frac{1}{M}$ et dans ce cas, le critère se simplifie. Le choix se porte dans ce cas sur le signal $s_m(t)$ qui donne lieu à la fonction de vraisemblance la plus élevée. La règle de décision porte le nom de décision au sens du **maximum de vraisemblance**. **Ce n'est que dans le cas où les différents symboles sont équiprobables a priori que le critère du Maximum A Posteriori (MAP) se ramène au Maximum de Vraisemblance (MV).**

Ainsi, dans la formule on a plus que la fonction de vraisemblance $p[r | s_m]$. En particulier, la fonction de vraisemblance $\lambda(s_m)$ associée au symbole $s_m(t)$ est donc donnée par

$$p[r | s_m] = \lambda(s_m) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp\left(-\sum_{k=1}^N \frac{(r_k - s_{mk})^2}{N_0}\right)$$

Considérons le cas binaire (PAM-2) avec des symboles de probabilités a priori qui peuvent être différentes. On décidera que $s_1(t)$ a été transmis si

$$\frac{p[s_1 | r]}{p[s_2 | r]} > 1 \text{ soit encore } \frac{p[s_1 | r]}{p[s_2 | r]} > \frac{s_1}{s_2}$$

Par l'expression de la fonction de vraisemblance on a alors

$$\frac{p[s_1|r]}{p[s_2|r]} = \exp\left(-\sum_{k=1}^N \frac{(r_k - s_{1k})^2}{N_0} + \frac{(r_k - s_{2k})^2}{N_0}\right)$$

$$\ln\left(\frac{p[s_1|r]}{p[s_2|r]}\right) = -\sum_{k=1}^N \frac{(r_k - s_{1k})^2}{N_0} + \frac{(r_k - s_{2k})^2}{N_0} > \ln\left(\frac{p[s_2]}{p[s_1]}\right)$$

Si les symboles sont équiprobables et que donc $p[s_2] = p[s_1]$, on décidera que $s_1(t)$ a été émis si

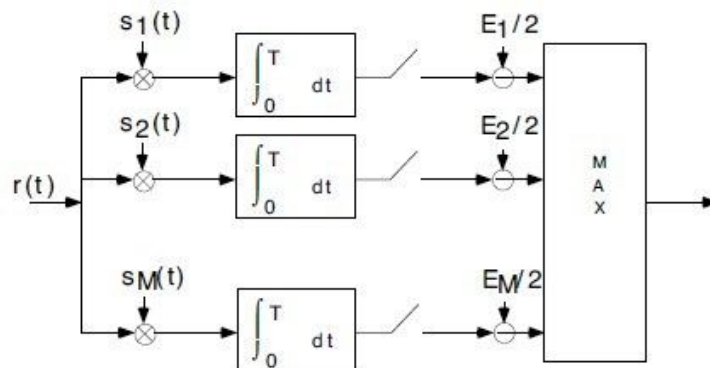
$$\sum_{k=1}^N \frac{(r_k - s_{2k})^2}{N_0} > \sum_{k=1}^N \frac{(r_k - s_{1k})^2}{N_0}$$

autrement dit, si la distance euclidienne entre r et s_2 est plus grande que r et s_1 alors on choisit que s_1 a été transmis.

On voit donc que dans le cas où la perturbation introduite par le canal est un BBGA, et les symboles sont équiprobables, le critère du MAP revient à minimiser une distance quadratique entre les coordonnées du signal reçu et celles associées aux différents signaux susceptibles d'être transmis. On en déduit alors que le récepteur optimal effectue la corrélation entre le signal reçu $r(t)$ et toutes les hypothèses $s_m(t)$, et, après correction liée à l'énergie E_m du signal émis, choisit la plus élevée.

Rappel : $p[r|s_m]$ a comme donnée r qui représente un vecteur et s_m qui représente la forme d'onde numéro m . Par exemple, la probabilité $p[r|s_2]$ donne la probabilité qu'on a transmis la 2ème forme d'onde.

Voici le détecteur optimal au sens du maximum a posteriori. On reçoit un signal $r(t)$ qui est une forme d'ondes possibles $s_m(t)$. On fait la corrélation de du signal reçu $r(t)$ avec toutes les formes d'onde $s_m(t)$ possible suivi d'échantillonneurs. Si on a des amplitudes différentes possibles, on doit tenir compte des termes de correction $E/2$.



Question 8 : Codage de source

Définir l'entropie d'une source discrète. A quoi sert le codage de source ? Exposer le premier théorème de Shannon, relatif au codage de source. Illustrer ce théorème en comparant plusieurs méthodes de codage pour une source discrète dont l'alphabet comporte 4 symboles.

Slide 1.5 - 1.11 - Livre de référence 574 - 578

Entropie d'une source discrète

Une source discrète sans mémoire peut être vue comme une variable aléatoire discrète émettant des symboles indépendants selon un alphabet défini avec une probabilité de p_k

La quantité d'information liée au symbole émis peut être calculée en bit selon la probabilité p_k

$$I(s_k) = \log_2\left(\frac{1}{p_k}\right)$$

Cette quantité d'information ne dépend donc que de p_k et peut être aussi considérée comme une variable aléatoire de valeur dépendante de p_k

L'entropie de la source $H(S)$ est quant à elle la valeur moyenne de l'information produite par la source (considérant tous les symboles possibles de l'alphabet)

$$H(S) = E[I(s_k)] = \sum_{k=0}^{K-1} p_k \log_2\left(\frac{1}{p_k}\right)$$

On a donc $H(S) = 0$ si aucune incertitude n'est liée à l'émission de symbole et $H(S) = \log_2(K)$ si tous les symboles sont équiprobables ($p_k = \frac{1}{K}$)

Premier théorème de Shannon

Soit une source discrète sans mémoire d'entropie $H(S)$, la longueur moyenne des mots code L obtenus par un codeur de source sans distorsion est bornée par:

$$L \geq H(S)$$

En pratique aucun codeur n'atteindra ce minimum théorique, il sera donc caractérisé par son efficacité de codage η

$$\eta = \frac{H(S)}{L} \leq 1$$

Le but étant d'être le plus efficace possible (éviter la redondance, ne pas avoir de même préfixe qu'un autre mot code)

Codage de source

Réponse à l'objectif de communication efficace en comprimant au maximum la source d'information, on s'interroge sur la façon de représenter efficacement les données produites par une source discrète, en connaissant les propriétés statistiques de celle-ci

Les mots codes produits par le codeur de source sont supposés être sous forme binaire, et le code doit être sans distorsion, ce qui signifie que la séquence de symboles originale doit pouvoir être reconstruite parfaitement à partir de la séquence binaire codée (pouvant être de longueur différentes)

Exemple

<u>Symbole source</u>	<u>Probabilité d'occurrence</u>	<u>Code I</u>	<u>Code 2</u>	<u>Code 3</u>
s_0	0.5	0	0	0
s_1	0.25	1	10	01
s_2	0.125	00	110	011
s_3	0.125	11	111	01111

Taille moyenne

- Code I $1*0.5 + 1*0.25 + 2*0.125 + 2*0.125 = 1.25$
- Code II $1*0.5 + 2*0.25 + 3*0.125 + 3*0.125 = 1.75$
- Code III $1*0.5 + 2*0.25 + 3*0.125 + 4*0.125 = 1.875$

La taille moyenne du code 1 est la plus faible mais le code n'est pas correct, en effet, on ne peut pas différencier le s_0 (0) avec s_2 (00)

Entropie de la source

$$\begin{aligned} H(S) &= \sum_{k=0}^{K-1} p_k \log_2\left(\frac{1}{p_k}\right) = 0.5 * \log_2(2) + 0.25 * \log_2(4) + 0.125 * \log_2(8) + 0.125 * \log_2(8) \\ &= 0.5 + 0.5 + 0.375 + 0.375 \\ &= 1.75 \end{aligned}$$

L'entropie de la source est donc égale à la longueur moyenne du *Code II*. Selon le second théorème de Shannon, cette valeur moyenne de mot code est l'optimum qu'il est possible d'atteindre.

Cela confirme aussi la non validité du *Code I* étant donné que $1.25 < 1.75$ (va à l'encontre du théorème)

Question 9 : Codage de canal

Définir les notions d'information mutuelle et de capacité de canal. A quoi sert le codage de canal ? Exposer le second théorème de Shannon, relatif au codage de canal. Appliquer au canal binaire symétrique. Donner l'expression de la capacité d'un canal gaussien. Commenter cette expression.

Slide 2.16 - 2.31 + Livre de référence 584 - 602

Information mutuelle

L'incertitude liée à X se mesure par l'entropie $H(X)$. Étant donné que la sortie Y est une version bruitée de X, on cherche à connaître l'incertitude de X en observant Y. Pour l'observation de Y, on peut définir l'entropie conditionnelle

$$H(X|Y) = \sum_{K=0}^{K-1} \sum_{J=0}^{J-1} p(x_J, y_K) \log_2 \left(\frac{1}{p(x_J|y_K)} \right)$$

$H(X|Y)$ correspond à la quantité d'incertitude qu'il reste sur X après avoir observé Y

Mais comme l'entropie $H(X)$ représente l'incertitude liée à X avant d'avoir observé Y, on peut calculer l'information mutuelle du canal $I(X, Y)$ représentant la part d'incertitude de X qui a été résolue par l'observation de Y

$$I(X, Y) = H(X) - H(X|Y)$$

On peut aussi calculer l'entropie conjointe

$$H(X, Y) = \sum_{K=0}^{K-1} \sum_{J=0}^{J-1} p(x_J, y_K) \log_2 \left(\frac{1}{p(x_J, y_K)} \right)$$

qui mesure quelle quantité d'information est contenue dans un système de deux variables aléatoires

Ensuite faire le lien avec l'information mutuelle

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$$

Capacité de canal

La capacité de canal est définie comme l'information mutuelle maximum entre entrée et sortie du canal

$C = \max_{\{p(x_j)\}} I(X, Y)$ en bit/utilisation du canal

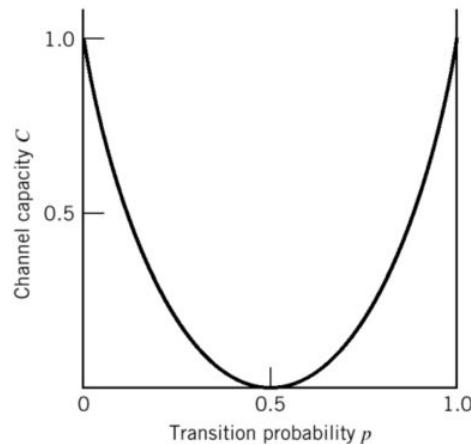
Avec $I(X, Y) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j, y_k) \log_2 \left(\frac{p(y_k|x_j)}{p(y_k)} \right)$ l'information mutuelle

Cas particulier du canal binaire symétrique

On peut démontrer que l'information mutuelle est maximale pour des symboles d'entrées équiprobables $p(x_0) = p(x_1) = 0.5$

La capacité de canal se calcule alors par $C = 1 + p \log_2(p) + (1 - p) \log_2(1 - p)$

Pour un canal sans bruit ($p = 0$) : $C = 1$ bit / utilisation du canal, correspondant à l'entropie de l'entrée.
Le canal est inutilisable si $p = \frac{1}{2}$: $C = 0$



Codage de canal

Réponse à l'objectif de communication fiable en protégeant le système contre les erreurs dues au bruit

Cela implique l'ajout de redondance contrôlée à l'information utile (opération duale de codage de source qui consistait à éliminer la redondance intrinsèque de la source)

Exemple

Dans les codes en bloc, on ajoute $n - k$ bits de redondance à des messages de taille k . De cette manière, on obtient des mots code de taille n . Le taux de codage est défini comme

$$r = \frac{k}{n} \leq 1$$

L'objectif du codage de canal est de faire en sorte que le message de départ puisse être récupéré à partir du mot code reçu en sortie du canal bruité, le tout avec une probabilité d'erreur minimale

Second théorème de Shannon - Channel coding theorem

Objectif : avoir un système de codage de canal tel que la probabilité qu'un bit de message soit erroné en sortie soit arbitrairement faible tout en restant efficace

Soit une source discrète sans mémoire, d'entropie $H(S)$, produisant des symboles toutes les T_s secondes et un canal discret sans mémoire de capacité C utilisé toutes les T_c secondes. Alors, si

$$\frac{H(S)}{T_s} \leq \frac{C}{T_c}$$

Il existe un système de codage permettant de récupérer la source avec un taux d'erreur arbitrairement faible. Le rapport $\frac{C}{T_c}$ est le taux critique

Théorème inverse

Inversément, si

$$\frac{H(S)}{T_s} > \frac{C}{T_c}$$

Alors, il n'est pas possible de transmettre de l'information de la source sur le canal et le récupérer avec un taux d'erreur arbitrairement faible

Le théorème de codage de canal ne fournit qu'une preuve d'existence de bons code mais ne précise absolument pas comment construire ces codes. Il ne précise pas non plus quelle sera la valeur pratique du taux d'erreur, il se contente de montrer que le taux d'erreur tend vers 0 quand la longueur n du code tend vers l'infini

Application au canal binaire symétrique

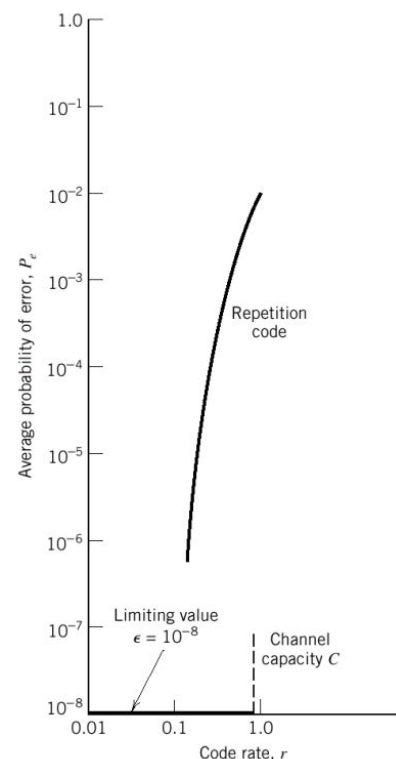
La source émet des symboles équiprobable ($H(S) = 1$) toutes les T_s secondes. Le canal est utilisé chaque T_c seconde, le taux de code vaut donc

$$r = T_c/T_s$$

Pour être dans les conditions du théorème de Shannon, il faut donc satisfaire la relation $r \leq C$

Pour un canal dont les la probabilité de transition $p = 10^{-2}$, on a $C = 0.9192$. Il suffit donc de choisir un taux de code $r \leq 0.9192$ pour qu'il soit possible de concevoir un système de codage fournissant un taux d'erreur arbitrairement faible

En comparaison, l'utilisation d'un simple code à répétition implique le choix d'un taux de codage r très petit pour atteindre un taux d'erreur acceptable



Capacité d'un canal Gaussien

Dans le cas d'une variable continue X , de densité de probabilité $f_x(x)$, on peut montrer que l'entropie $H(X)$ (définie à la base pour des variables aléatoires discrètes) est toujours infinie. On s'intéressera donc à l'entropie différentielle $h(x)$

$$h(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \log_2 \left[\frac{1}{f_x(x)} \right] dx$$

L'entropie différentielle prend des valeurs finies... par contre, elle peut être négative

Distribution gaussienne (moyenne μ , variance σ)

- Entropie différentielle : $h(X) = 0.5 \log_2 (2\pi e \sigma^2)$
- Dépend uniquement de σ^2 , pas de μ
- Gaussienne = $h(X)$ plus élevée que n'importe quelle autre distribution de même variance

Information mutuelle: $I(X; Y) = h(X) - h(X | Y)$, satisfaisant aux mêmes propriétés que l'information mutuelle définie pour les variables aléatoires discrètes

Exemple

- Soit un canal **gaussien** de **bande passante limitée à B** et de **puissance limitée à P**.
- La source $X(t)$, de bande passante B , peut être échantillonnée à cadence $2B$ pour fournir la séquence d'échantillons $(X_1, X_2, \dots, X_K)$ pendant une durée T avec $K = 2BT$
- Le signal transmis sur le canal est perturbé par un bruit AWGN de densité spectrale de puissance $N_0/2$ dont la bande passante est aussi limitée à B
- Les échantillons du signal reçu s'écrivent $Y_k = X_k + N_k$
- Variance des échantillons de bruit N_k : $\sigma^2 = N_0 B$
- Les échantillons du signal reçu Y_k sont statistiquement indépendant
- Contrainte sur la puissance du signal transmis $E[X_k^2] = P$

Capacité du canal gaussien

$$C = \max_{f_{x_k}(x)} \{ I(X_k; Y_k) : E[X_k^2] = P \}$$

Avec l'information mutuelle

$$I(X_k; Y_k) = h(Y_k) - h(Y_k | X_k) = h(Y_k) - h(N_k)$$

Le maximum de $I(X_k; Y_k)$ sera donc obtenu en choisissant la distribution $f_{x_k}(x)$ qui maximise $h(Y_k)$ tout en respectant la contrainte de puissance P (la distribution gaussienne)

Le signal reçu est donc gaussien de variance $P + \sigma^2$

L'entropie différentielle du signal reçu Y_k et du bruit N_k sont donc

$$h(Y_k) = 0.5 \log_2 [2\pi e (P + \sigma^2)] \text{ et } h(N_k) = 0.5 \log_2 (2\pi e \sigma^2)$$

La capacité du canal gaussien C vaut

$$C = 0.5 \log_2 \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) [\text{bits / utilisation de canal}]$$

Si on utilise le canal K fois (transmission de K échantillons X_k) sur une durée de T secondes, la capacité par unité de temps devient

$$C = \frac{K}{T} 0.5 \log_2 \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) = B \log_2 \left(1 + \frac{P}{N_0 B} \right) [\text{bits / secondes}]$$

Il s'agit là de l'un des plus remarquables résultats de la théorie de l'information, en une simple formule, on peut comprendre les effets respectifs des 3 caractéristiques principales du système sur la capacité du canal (la bande passante B, la puissance moyenne du signal P, et la densité spectrale de puissance du signal reçu N_0)

La capacité du canal dépend de la bande passante B de manière linéaire, alors qu'elle ne dépend du rapport signal à bruit $\frac{P}{N_0 B}$ que de manière logarithmique. Pour une variance de bruit donnée, il est donc plus facile d'augmenter la capacité du canal en augmentant la bande passante qu'en augmentant la puissance de transmission

Limite fondamentale d'un système de communication ('channel coding theorem') :

Si l'on transmet l'information à un débit binaire inférieur ou égal à C bits/s, il est théoriquement possible d'atteindre un taux d'erreur arbitrairement faible. Pour atteindre cette limite, le signal transmis devra avoir des propriétés statistiques semblables à celles d'un bruit gaussien.

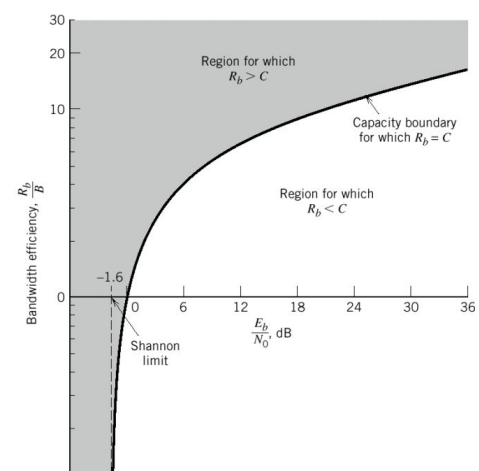
Supposons un signal idéal où les données sont transmises à un débit binaire R_b égal à la capacité C du canal. La puissance transmises vaut donc $P = E_b C$ où E_b représente l'énergie transmise par bit

Le système idéal est défini par la relation suivante

$$\frac{C}{B} = \log_2 \left(1 + \frac{E_b}{N_0} \frac{C}{B} \right) \text{ ou encore } \frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{C/B} - 1}{C/B}$$

Limite de Shannon (BP infinie)

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \frac{E_b}{N_0} = \log(2) = 0.693$$



Question 10 : Codes correcteurs d'erreurs

Expliquer le fonctionnement d'un code linéaire en bloc. Quels sont les principaux paramètres qui le caractérisent ? Expliquer les notions de matrice d'encodage et de décodage, ainsi que la notion de syndrome. Que sont les capacités correctrices et détectrices d'erreurs ? Illustrer à l'aide d'un code simple (par exemple Hamming). En quoi diffèrent-ils des codes convolutionnels ?

Livre de référence 632 - 641

Définition

Un code correcteur d'erreurs est une technique de codage basée sur la redondance de l'information, destinée à détecter, voire corriger, les erreurs qui peuvent être générées par un canal de communication peu fiable. La détection d'une erreur dans un message peut sembler naturelle, sa location précise et sa correction sont quant à elles moins évidentes.

Codes linéaires...

Dans un code linéaire, si c_1 et c_2 désignent les mots codes respectifs des deux suites d'information de k bits d_1 et d_2 , alors à la suite d'information de k bits $d_1 \oplus d_2$ est associé au mot code $c_1 \oplus c_2$ où l'opérateur $\oplus$ désigne l'addition bit à bit modulo 2.

... en bloc

Dans un code en bloc, les n éléments binaires des mots codes sont calculés uniquement avec les k bits d'information du bloc courant

$$[d_1 \ d_2 \ \dots \ d_k] \rightarrow [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]$$

Au besoin, le message initial est découpé en paquets, ou blocs, de taille k .

Pour un code linéaire en bloc, le mot code c s'obtient à partir du mot d'information d par une expression matricielle de la forme :

$$c = d \cdot G$$

où c est un vecteur ligne de taille $1 \times n$, d est un vecteur de taille $1 \times k$ et G est une matrice de taille $k \times n$ appelée **matrice génératrice** du code

Le **taux d'information** r d'un code est le nombre $r = k / n$

- $r < 1$: ajout d'information
- $r = 1$: pas d'information supplémentaire
- $r > 1$: compression de donnée

La **distance de Hamming** entre x et y est le nombre $d(x; y)$ de composantes où x et y diffèrent

Le **poids de Hamming** w de x est le nombre de composantes non nulles de x

Exemple

Si $x = 10110$ et $y = 00101$

- la distance de Hamming $d(x, y) = 4$
- Le poids de Hamming $w(x) = 3$ et $w(y) = 2$

Si on a une liste de mot code, on relève les poids minimum w et distances minimum de Hamming d

Ex :

mot original	mot codé
00	00 000
01	01 101
10	10 110
11	11 011

$n = 5 ; k = 2$
 $d^* = 3$
 $w^* = 3$

Un code est dit **t-correcteur** si il permet de corriger toute erreur d'au plus t caractères. La condition pour qu'un code soit t-correcteur est la suivante :

$$d^* \geq 2t + 1 \text{ avec } t = E\left(\frac{d^*-1}{2}\right)$$

Forme systématique d'un code

Un code est entièrement déterminé par sa matrice génératrice G

$$c = d \cdot G$$

Les vecteurs-ligne de G sont eux-mêmes des mots-codes, et sont supposés linéairement indépendants. Cela revient à imposer que si $d_1 \neq d_2$ alors $c = d_1 G \neq c_2 = d_2 G$. Donc des mots d'information différents ne peuvent pas être identiquement codés. en d'autres termes, la matrice G est de rang k .

Les combinaisons linéaires sur les lignes de G ainsi que les permutations sur les colonnes de G laissent inchangées la probabilité d'erreur par mot code : la distance (ou le poids) du code est inchangé.

D'après ces propriétés, la matrice génératrice G peut s'écrire sous la forme (Pivot de Gauss) :

$$\tilde{G} = [I_k | P_{k \times (n-k)}]$$

où I_k est la matrice identité de taille k et la matrice P est appelée la matrice de parité du code. Lorsque G est sous sa forme systématique, les mots code commencent par k bits d'information et sont complétés par $(n - k)$ bits de redondance. Donc si $d = [d_1 d_2 \dots d_k]$ alors le mot code devient :

$$c = dG = [d_1 d_2 \dots d_k \ p_1 p_2 \dots p_{n-k}]$$

Exemple

Soit le code linéaire (4,2) binaire : $\{0000, 1101, 0110, 1011\}$. Ce code, ayant quatre mots code, peut coder quatre messages qui sont les quatre mots binaires de deux bits : $d_1 = 00$, $d_2 = 01$, $d_3 = 10$, $d_4 = 11$. Faisons ce codage en utilisant une matrice génératrice. Une base pour ce code linéaire pourrait être : $c_1 = 1101$ et $c_2 = 0110$, ce qui donne :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour sa forme systématique, on choisit une base comme : $c_1 = 1011$ et $c_2 = 0110$ ce qui donne

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, par exemple un bloc $d = [d_1 \ d_2]$ est codé en $c = dG = [d_1 \ d_2 \ p_1 \ p_2]$.

Matrice de contrôle de parité

On considère un code linéaire C de matrice génératrice G . On appelle matrice de contrôle de parité une matrice H de dimension $(n - k) \times k$ de rang $(n - k)$ (rang plein) qui vérifie :

$$H \cdot G^T = 0$$

Caractérisation d'un mot code

Si c est un bloc, de mot code $d = cG$ alors on doit avoir

$$H d^T = H (cG)^T = H G^T c^T = (H G^T) c^T = 0$$

Ainsi on a la propriété que le bloc d reçu est un mot code (donc jugé non erroné) si et seulement si $H d^T = 0$

Construction d'une matrice de contrôle de parité

Soit un code linéaire dont la matrice G est mise sous forme systématique, alors la matrice de contrôle de parité H a pour expression

$$H = [(P^T)_{(n-k) \times k} \mid I_{n-k}]$$

Par exemple,

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Décodage par syndrome

Soit un code linéaire de matrice de contrôle de parité H , c un mot envoyé et $y = c + b$ le mot reçu.

Alors, on a :

$$H_y^T = H(c + b)^T = Hc^T + Hb^T = Hb^T$$

Ainsi, le vecteur $s = H_y^T$ ne dépend que du bruit et non pas du mot envoyé. On l'appelle le **syndrome** associé à y .

Donc, le syndrome se calcule à partir du mot reçu et de la matrice de contrôle de parité, et ne dépend que du bruit et non pas du mot code émis. A partir de la connaissance de H et de y , on peut alors espérer déterminer le bruit b car $s = H_y^T = Hb^T$. Une fois le bruit connu, c se déduit simplement par $c = y \oplus b$.

Exemples

Code de parité

le principe est de rajouter un bit de parité (1 ou 0) de tel sorte que le nombre total de 1 sur le mot code formé est paire. Le taux d'information est donc de $r = n/1$.

Information	Mot code
10111010	10111010 1 - Nombre impair de 1
10101010	10101010 0 - Nombre pair de 1

La matrice génératrice

Code à répétition

Il s'agit de la manière la plus "naïve" d'aborder le problème : si la transmission d'un mot peut-être entachée d'erreur(s), il n'y a qu'à le transmettre directement plusieurs fois !

Information	Mot code
00	00 00 00
01	01 01 01

Ici on a donc par exemple 3 couple. Ainsi, s'il survient une erreur dans la transmission, elle n'affectera pas les trois couples formant le mot du code. Le décodage peut donc se faire par vote majoritaire sur les 3 couples de bits. Pour ce code à répétition (cfr tableau) le taux d'information est seulement 33% (33% des bits transmis correspondent à de l'information), tandis que 66% ont pour seul but la protection de cette information.

Code à répétition amélioré

Information	Mot code
00	00 000
01	01 101
10	10110
11	11011

Supposons que le mot reçu soit $y = 01001$. Ce mot ne correspond à aucun mot du code, il comporte donc une ou plusieurs erreur. L'idée de la correction est de rechercher parmi tous les mots code celui est le "plus proche". Le taux d'information est de $r = 2/5$.

Ecart mot reçu/mot du code	Poids de l'erreur
$y - 00\ 000 = 01001$	2
$y - 01\ 101 = 00100$	1
$y - 10\ 110 = 11111$	5
$y - 11\ 011 = 10010$	2

matrice génératrice